

Условие

Найти наибольшее M и наименьшее m значения функции $u = 3 + 2xy$ на заданном множестве:

а) $x^2 + y^2 \leq 1$; б) $4 \leq x^2 + y^2 \leq 9$.

Решение

Найдём критические точки функции $u = 3 + 2xy$.

$$u'_x = 2y; \quad u'_y = 2x.$$

$$\begin{cases} 2y = 0 \\ 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Имеем одну стационарную точку $M_0(0;0)$.

Чтобы упростить решение задачи, найдём значения функции $u = 3 + 2xy$ в точках возможного условного экстремума если $x^2 + y^2 = a^2$, где $a > 0$. Составим функцию Лагранжа:

$$F = 3 + 2xy + \lambda(x^2 + y^2 - a^2)$$

$$F'_x = 2y + 2\lambda x; \quad F'_y = 2x + 2\lambda y.$$

$$\begin{cases} 2y + 2\lambda x = 0 \\ 2x + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + \lambda x = 0 \\ x + \lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$$

$$y = -\lambda x; \quad x - \lambda^2 x = 0; \quad x \cdot (1 - \lambda^2) = 0; \quad \begin{cases} x = 0 \\ \lambda = -1 \\ \lambda = 1 \end{cases}$$

Если $x = 0$, то $y = 0$. Имеем противоречие с условием $x^2 + y^2 = a^2$.

Если $\lambda = -1$, то получим:

$$\begin{cases} y - x = 0 \\ x^2 + y^2 = a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ x^2 = \frac{a^2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ x = -\frac{a}{\sqrt{2}} \\ x = \frac{a}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Имеем точки $M_1\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}; -\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$, $M_2\left(\frac{a}{\sqrt{2}}; \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$.

Если $\lambda = 1$, то получим:

$$\begin{cases} y+x=0 \\ x^2+y^2=a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x \\ x^2=\frac{a^2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x \\ x=-\frac{a}{\sqrt{2}} \\ x=\frac{a}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Имеем точки $M_3\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}; \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$, $M_4\left(\frac{a}{\sqrt{2}}; -\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$.

В точках M_1 , M_2 , M_3 и M_4 значения функции u будут такими:

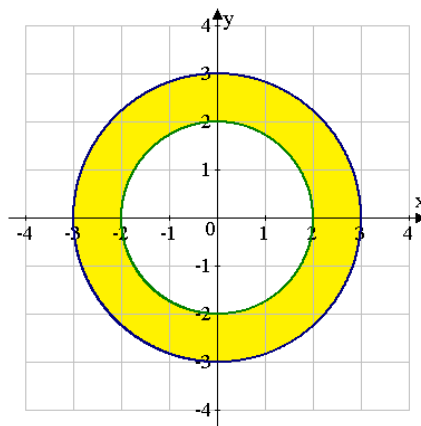
$$u(M_1)=u(M_2)=3+2\cdot\frac{a^2}{2}=3+a^2; \quad u(M_3)=u(M_4)=3-2\cdot\frac{a^2}{2}=3-a^2.$$

Итак, в точках возможного условного экстремума функция u принимает лишь два значения: $3+a^2$ или $3-a^2$. Теперь обратимся к пунктам данной задачи.

а) Неравенство $x^2+y^2 \leq 1$ определяет множество точек, расположенных внутри и на окружности $x^2+y^2=1$ с центром в начале координат и радиусом $R=1$. Точка $M_0(0;0)$ принадлежит этой области, причём в этой точке $u=3$.

На границе области имеем $x^2+y^2=1$, т.е. имеем уравнение вида $x^2+y^2=a^2$ при $a=1$. Согласно проведённому выше исследованию, получим такие значения функции в точках возможного условного экстремума: $u=3+1^2=4$ и $u=3-1^2=2$. Следовательно, наименьшее значение $u_{\min}=2$; наибольшее значение $u_{\max}=4$.

б) Неравенство $4 \leq x^2+y^2 \leq 9$ определяет множество точек, расположенных между и на окружностях $x^2+y^2=4$ и $x^2+y^2=9$:



Точка M_0 не принадлежит этой области. Граница области образована двумя окружностями с уравнениями вида $x^2+y^2=a^2$, где $a=2$ и $a=3$.

- При $a=2$ имеем такие значения функции: $u=7$ и $u=-1$.
- При $a=3$ имеем такие значения функции: $u=12$ и $u=-6$.

Следовательно, $u_{\min}=-6$, $u_{\max}=12$.

Ответ:

а) $m=2$, $M=4$.

б) $m = -6, M = 12.$