

Условие

Исследовать функцию $u = x^3 + y^2 + z^2 + 6xy - 4z$ на экстремум.

Решение

$$u'_x = 3x^2 + 6y, \quad u'_y = 2y + 6x, \quad u'_z = 2z - 4.$$

$$\begin{cases} 3x^2 + 6y = 0 \\ 2y + 6x = 0 \\ 2z - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2y = 0 \\ y + 3x = 0 \\ z = 2 \end{cases}$$

Из второго уравнения: $y = -3x$. Подставляем в первое уравнение:

$$x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow x(x - 6) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 6 \end{cases}.$$

- Если $x = 0$, то $y = 0$.
- Если $x = 6$, то $y = -18$.

Стационарные точки: $M_1(0;0;2)$, $M_2(6;-18;2)$.

$$u''_{xx} = 6x; \quad u''_{xy} = 6; \quad u''_{xz} = 0; \quad u''_{yy} = 2; \quad u''_{yz} = 0; \quad u''_{zz} = 2.$$

Запишем матрицу из частных производных и определим её главные миноры:

$$\begin{pmatrix} 6x & 6 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 = 6x;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 6x & 6 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 12x - 36$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 6x & 6 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 12 \cdot \begin{vmatrix} x & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 12 \cdot (2x - 6)$$

В точке M_1 критерий Сильвестра неприменим, так как в этой точке $\Delta_1 = 0$. Рассмотрим сначала точку M_2 :

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= 6x = 18 \\ \Delta_2 &= 12x - 36 = 36 \\ \Delta_3 &= 12 \cdot (2x - 6) = 72 \end{aligned}$$

Так как $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 > 0$, то $M_2(6;-18;2)$ – точка минимума.

$$u_{\min} = u(6; -18; 2) = -112$$

Теперь вернёмся к точке $M_1(0; 0; 2)$. В данной точке имеем $u(0; 0; 2) = -4$. Рассмотрим значение функции u в точках вида $(\varepsilon, 0; 2)$, которые наличествуют в любой окрестности точки M_1 .

$$u(\varepsilon, 0; 2) = \varepsilon^3 - 4$$

Если $\varepsilon < 0$, то $u(\varepsilon, 0; 2) < -4$; если же $\varepsilon > 0$, то $u(\varepsilon, 0; 2) > -4$. Следовательно, в любой, сколь угодно малой окрестности точки M_1 , функция может принимать значения как бóльшие, так и меньшие нежели -4 . Значит, в точке M_1 нет экстремума.

Ответ: $(6; -18; 2)$ – точка минимума, $u_{\min} = -112$.