

Условие

В интеграле $\iint_G f(x, y) dx dy$, $G = \{2ay \leq x^2 + y^2 \leq 4ay, y \geq |x|\}$ перейти к полярным координатам и записать его в виде повторных интегралов, расставив пределы интегрирования в разных порядках, если все параметры положительны.

Решение

$$x^2 + y^2 = 2ay$$

$$x^2 + y^2 - 2ay = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2ay + a^2 = a^2$$

$$x^2 + (y - a)^2 = a^2$$

$$x^2 + y^2 = 4ay$$

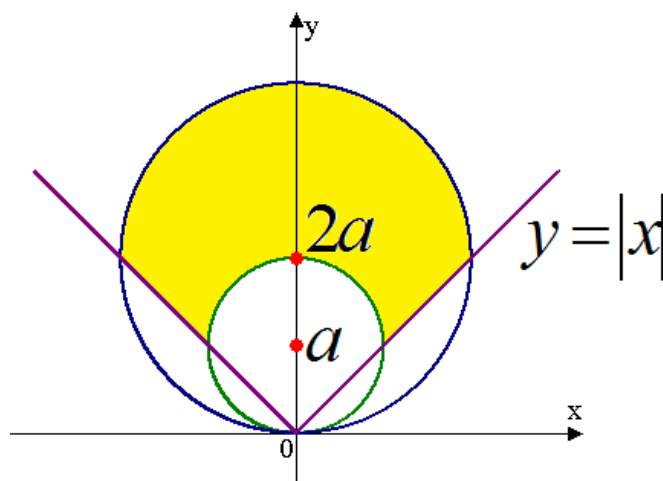
$$x^2 + y^2 - 4ay = 0$$

$$x^2 + y^2 - 4ay + 4a^2 = 4a^2$$

$$x^2 + (y - 2a)^2 = 4a^2$$

Уравнение $x^2 + y^2 = 2ay$ определяет окружность с центром в точке $(0; a)$ и радиусом $R_1 = a$.

Уравнение $x^2 + y^2 = 4ay$ определяет окружность с центром в точке $(0; 2a)$ и радиусом $R_2 = 2a$.



Перейдём в полярную систему координат:

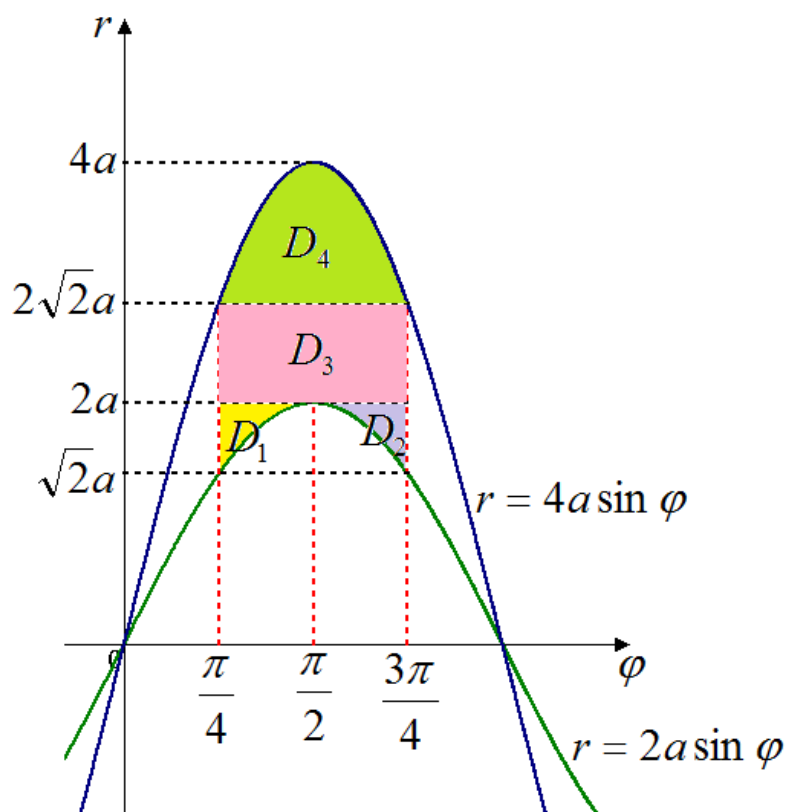
$$x^2 + y^2 = 2ay \Rightarrow r^2 = 2ar \sin \varphi; r = 2a \sin \varphi.$$

$$x^2 + y^2 = 4ay \Rightarrow r^2 = 4ar \sin \varphi; r = 4a \sin \varphi.$$

$$\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{4}; 2a \sin \varphi \leq r \leq 4a \sin \varphi.$$

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\varphi \int_{2a \sin \varphi}^{4a \sin \varphi} r f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) dr$$

Для изменения порядка интегрирования построим в прямоугольной декартовой системе координат $O\varphi r$ графики $r = 2a \sin \varphi$ и $r = 4a \sin \varphi$:



$$D_1: \begin{cases} \sqrt{2}a \leq r \leq 2a \\ \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \arcsin \frac{r}{2a} \end{cases}; D_2: \begin{cases} \sqrt{2}a \leq r \leq 2a \\ \pi - \arcsin \frac{r}{2a} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{4} \end{cases}; D_3: \begin{cases} 2a \leq r \leq 2\sqrt{2}a \\ \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{4} \end{cases}; D_4: \begin{cases} 2\sqrt{2}a \leq r \leq 4a \\ \arcsin \frac{r}{4a} \leq \varphi \leq \pi - \arcsin \frac{r}{4a} \end{cases}.$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\varphi \int_{2a \sin \varphi}^{4a \sin \varphi} r f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) dr = \int_{\sqrt{2}a}^{2a} dr \int_{\frac{\pi}{4}}^{\arcsin \frac{r}{2a}} r f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) d\varphi + \int_{\sqrt{2}a}^{2a} dr \int_{\pi - \arcsin \frac{r}{2a}}^{\frac{3\pi}{4}} r f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) d\varphi +$$

$$+ \int_{2a}^{2\sqrt{2}a} dr \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} r f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) d\varphi + \int_{2\sqrt{2}a}^{4a} dr \int_{\arcsin \frac{r}{4a}}^{\pi - \arcsin \frac{r}{4a}} r f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) d\varphi$$