

Условие

Найти значения α и β , при которых функция $f(x) = \frac{xe^x}{e^x - 1} - \alpha x - \beta$ является бесконечно малой:

а) $x \rightarrow +\infty$; б) $x \rightarrow -\infty$.

Решение

а) $x \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{xe^x}{e^x - 1} - \alpha x - \beta = \frac{xe^x - (\alpha x + \beta)(e^x - 1)}{e^x - 1} = \\ &= \frac{xe^x - \alpha xe^x + \alpha x - \beta e^x + \beta}{e^x - 1} = \frac{(1 - \alpha)xe^x - \beta e^x + \alpha x + \beta}{e^x - 1} \end{aligned}$$

Рассмотрим сперва случай $1 - \alpha \neq 0$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1 - \alpha)xe^x - \beta e^x + \alpha x + \beta}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \alpha - \frac{\beta}{x} + \frac{\alpha}{e^x} + \frac{\beta}{xe^x}}{\frac{1}{x} - \frac{1}{xe^x}} = \infty$$

Итак, если $1 - \alpha \neq 0$, то $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty$. Нам же требуется, чтобы $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, посему вариант $1 - \alpha \neq 0$ не подходит. Остаётся лишь один возможный случай: $1 - \alpha = 0$, т.е. $\alpha = 1$. Подставляя $\alpha = 1$, будем иметь:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1 - \alpha)xe^x - \beta e^x + \alpha x + \beta}{e^x - 1} = [\alpha = 1] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\beta e^x + x + \beta}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\beta + \frac{x}{e^x} + \frac{\beta}{e^x}}{1 - \frac{1}{e^x}} = -\frac{\beta}{1} = -\beta.$$

Исходя из условия $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, получим $-\beta = 0$, т.е. $\beta = 0$.

Примечание:

Здесь использован тот факт, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x} = +\infty$ (при $a > 1$), откуда имеем $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{a^x} = 0$.

Доказательство данного утверждения можно найти в книге Г.М. Фихтенгольца «Курс дифференциального и интегрального исчисления» (том №1, пункт №54).

б) $x \rightarrow -\infty$

Рассмотрим вспомогательный предел:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{xe^x}{e^x - 1} = [t = -x] = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{-te^{-t}}{e^{-t} - 1} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{e^t - 1} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\frac{t}{e^t}}{1 - \frac{1}{e^t}} = \frac{0}{1 - 0} = 0$$

Так как $\frac{xe^x}{e^x-1} \rightarrow 0$, то при $\alpha \neq 0$ получим $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$. Так как функция $f(x)$ должна быть бесконечно малой, то заключаем, что $\alpha = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{xe^x}{e^x-1} - \alpha x - \beta \right) = [\alpha = 0] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{xe^x}{e^x-1} - \beta \right) = -\beta \Rightarrow -\beta = 0; \beta = 0.$$

Ответ: а) $\alpha = 1, \beta = 0$; б) $\alpha = 0, \beta = 0$.