

Условие

Вычислить двумя способами (непосредственно и по формуле Грина) $\int_L (xy + x + y)dx + (xy + x - y)dy$, где L – окружность $x^2 + y^2 = ax$. Интегрирование ведётся в положительном направлении.

Решение

$$x^2 + y^2 = ax, \quad x^2 - ax + y^2 = 0, \quad x^2 - ax + \frac{a^2}{4} + y^2 = \frac{a^2}{4}, \quad \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}.$$

Уравнение $x^2 + y^2 = ax$ определяет окружность с центром в точке $\left(\frac{a}{2}; 0\right)$ и радиусом $R = \frac{|a|}{2}$.

Непосредственное вычисление

$$\begin{aligned} \int_L (xy + x + y)dx + (xy + x - y)dy &= \left[\begin{matrix} x = R \cos t + \frac{a}{2} \\ y = R \sin t \end{matrix} \right] = \\ &= R \int_0^{2\pi} \left(\left(R \cos t + \frac{a}{2} \right) \cdot R \sin t + R \cos t + \frac{a}{2} + R \sin t \right) \cdot (-\sin t) + \left(\left(R \cos t + \frac{a}{2} \right) \cdot R \sin t + R \cos t + \frac{a}{2} - R \sin t \right) \cdot \cos t \, dt = \\ &= R \int_0^{2\pi} \left(-R^2 \cos t \sin^2 t - \frac{aR}{4} + R^2 \cos^2 t \sin t + \left(\frac{aR}{4} - R \right) \sin 2t + \left(R + \frac{aR}{4} \right) \cos 2t + \frac{a}{2} \cdot (\cos t - \sin t) \right) dt = \\ &= R \cdot \left(-\frac{R^2 \sin^3 t}{3} - \frac{aR}{4} \cdot t - \frac{R^3}{3} \cdot \cos^3 t - \left(\frac{aR}{8} - \frac{R}{2} \right) \cdot \cos 2t + \left(\frac{R}{2} + \frac{aR}{8} \right) \cdot \sin 2t + \frac{a}{2} \cdot (\sin t + \cos t) \right) \Bigg|_0^{2\pi} = \\ &= R \cdot \left(-\frac{a\pi R}{2} \right) = -\frac{a\pi R^2}{2} = -\frac{\pi a^3}{8} \end{aligned}$$

Формула Грина

В полярной системе координат уравнение $x^2 + y^2 = ax$ станет таким:

$$\rho^2 = a\rho \cos \varphi, \quad \rho = a \cos \varphi.$$

Рассмотрим случаи $a > 0$ и $a < 0$.

	$a < 0$	$a > 0$
Значения полярного угла	$\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned}
& \int_L (xy + x + y)dx + (xy + x - y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial(xy + x - y)}{\partial x} - \frac{\partial(xy + x + y)}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D (y + 1 - (x + 1)) dx dy = \\
& = \iint_D (y - x) dx dy = \int_{a_1}^{a_2} d\varphi \int_0^{a \cos \varphi} (\rho \sin \varphi - \rho \cos \varphi) d\rho = \int_{a_1}^{a_2} (\sin \varphi - \cos \varphi) d\varphi \int_0^{a \cos \varphi} \rho^2 d\rho = \\
& = \int_{a_1}^{a_2} (\sin \varphi - \cos \varphi) \cdot \frac{\rho^3}{3} \Big|_0^{a \cos \varphi} d\varphi = \frac{a^3}{3} \cdot \int_{a_1}^{a_2} (\sin \varphi - \cos \varphi) \cdot \cos^3 \varphi d\varphi = \frac{a^3}{3} \cdot \int_{a_1}^{a_2} (\sin \varphi \cdot \cos^3 \varphi - \cos^4 \varphi) d\varphi = \\
& = \frac{a^3}{3} \cdot \left(\int_{a_1}^{a_2} \sin \varphi \cdot \cos^3 \varphi d\varphi - \int_{a_1}^{a_2} \left(\frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \right)^2 d\varphi \right) = \frac{a^3}{3} \cdot \left(- \int_{a_1}^{a_2} \cos^3 \varphi d(\cos \varphi) - \frac{1}{4} \int_{a_1}^{a_2} (1 + 2 \cos 2\varphi + \cos^2 2\varphi) d\varphi \right) = \\
& = \frac{a^3}{3} \cdot \left(- \frac{\cos^4 \varphi}{4} \Big|_{a_1}^{a_2} - \frac{1}{4} \int_{a_1}^{a_2} \left(\frac{3}{2} + 2 \cos 2\varphi + \frac{\cos 4\varphi}{2} \right) d\varphi \right) = \frac{a^3}{3} \cdot \left(- \frac{\cos^4 \varphi}{4} - \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3\varphi}{2} + \sin 2\varphi + \frac{\sin 4\varphi}{8} \right) \right) \Big|_{a_1}^{a_2} = \\
& = \frac{a^3}{12} \cdot \left(- \cos^4 \varphi - \frac{3\varphi}{2} - \sin 2\varphi - \frac{\sin 4\varphi}{8} \right) \Big|_{a_1}^{a_2}
\end{aligned}$$

Для случая $a < 0$ получим:

$$\frac{a^3}{12} \cdot \left(- \cos^4 \varphi - \frac{3\varphi}{2} - \sin 2\varphi - \frac{\sin 4\varphi}{8} \right) \Big|_{\pi/2}^{3\pi/2} = \frac{a^3}{12} \cdot \left(- \frac{9\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} \right) = - \frac{\pi a^3}{8}.$$

При $a > 0$ получим:

$$\frac{a^3}{12} \cdot \left(- \cos^4 \varphi - \frac{3\varphi}{2} - \sin 2\varphi - \frac{\sin 4\varphi}{8} \right) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{a^3}{12} \cdot \left(- \frac{3\pi}{4} - \frac{3\pi}{4} \right) = - \frac{\pi a^3}{8}.$$

Ответ: $-\frac{\pi a^3}{8}$.