Решение задачи скачано с сайта AMKbook.Net
AMKbook.Net – занятия, решебник и учебные материалы по высшей математике и математическому анализу.

Условие

Вычислить двумя способами (непосредственно и по формуле Грина) $\int\limits_L (xy+x+y)dx+(xy+x-y)dy$, где L – эллипс $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$. Интегрирование ведётся в положительном направлении.

Решение

Непосредственное вычисление

Уравнение эллипса в параметрической форме: $\begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t \end{cases}$.

$$\int\limits_L (xy+x+y)dx+(xy+x-y)dy=\left[\begin{array}{l} x'=-a\sin t;\ \ y'=b\cos t; \\ 0\le t\le 2\pi. \end{array}\right]=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\left((a\cos t\cdot b\sin t+a\cos t+b\sin t)\cdot(-a\sin t)+(a\cos t\cdot b\sin t+a\cos t-b\sin t)\cdot b\cos t\right)dt=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\left(-a^2b\cos t\sin^2 t-a^2\cos t\sin t-ab\sin^2 t+ab^2\cos^2 t\sin t+ab\cos^2 t-b^2\sin t\cos t\right)dt=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\left(-a^2b\cos t\sin^2 t-b^2\sin t\cos t-a^2\cos t\sin t\right)dt+ab^2\cdot\int\limits_0^{2\pi}\cos^2 t\sin t dt+ab\cdot\int\limits_0^{2\pi}\left(\cos^2 t-\sin^2 t\right)dt=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\left(-a^2b\sin^2 t-b^2\sin t-a^2\sin t\right)d(\sin t)-ab^2\cdot\int\limits_0^{2\pi}\cos^2 t\,d(\cos t)+ab\cdot\int\limits_0^{2\pi}\cos 2t dt=$$

$$=\left(-\frac{a^2b\sin^3 t}{3}-\frac{b^2\sin^2 t}{2}-\frac{a^2\sin^2 t}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi}-ab^2\cdot\frac{\cos^3 t}{3}\Bigg|_0^{2\pi}+ab\cdot\frac{\sin 2t}{2}\Bigg|_0^{2\pi}=0-0+0=0.$$

Вычисление по формуле Грина

$$\int\limits_L (xy+x+y)dx+(xy+x-y)dy=\iint\limits_D\left(\frac{\partial(xy+x-y)}{\partial x}-\frac{\partial(xy+x+y)}{\partial y}\right)dxdy=\iint\limits_D\left(y+1-(x+1)\right)dxdy=$$

$$=\iint\limits_D(y-x)dxdy=\int\limits_{-a}^{a}dx\int\limits_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}(y-x)dy=\int\limits_{-a}^{a}\left(\frac{y^2}{2}-xy\right)\Bigg|_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}dx=-2b\int\limits_{-a}^{a}x\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx=0$$

Примечание

Функция $x\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}$ является нечётной; пределы интегрирования симметричны, посему $\int\limits_{-a}^{a}x\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}\,dx=0$.

Ответ: 0.