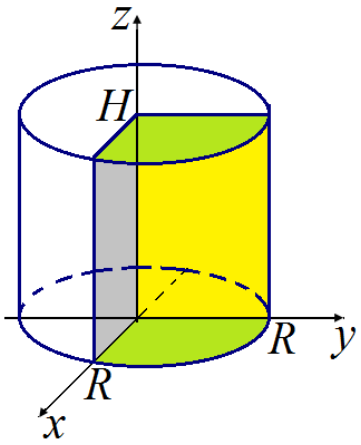
Решение задачи скачано с сайта AMKbook.Net
AMKbook.Net – занятия, решебник и учебные материалы по высшей математике и математическому анализу.

Условие

Найти интеграл $\iint\limits_S yzdxdy + xzdydz + xydxdz$, где S – внешняя сторона поверхности, расположенной в первом октанте и составленной из цилиндра $x^2 + y^2 = R^2$ и плоскостей $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $z = H$.

Решение



В проекции на плоскость Oxy получим область D, ограниченную частью окружности $x^2 + y^2 = R^2$, лежащей в первой четверти.

В цилиндрической системе координат получим:

$$0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le \rho \le R,\ 0 \le z \le H.$$

$$\iint\limits_S yzdxdy + xzdydz + xydxdz = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial(xz)}{\partial x} + \frac{\partial(xy)}{\partial y} + \frac{\partial(yz)}{\partial z} \right) dxdydz = \iiint\limits_V (z + x + y) dxdydz =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^R \rho d\rho \int\limits_0^H (\rho\cos\varphi + \rho\sin\varphi + z) dz = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^R \rho \cdot \left(\rho z\cos\varphi + \rho z\sin\varphi + \frac{z^2}{2} \right)\Bigg|_0^H d\rho =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^R \left(H\rho^2\cos\varphi + H\rho^2\sin\varphi + \frac{\rho H^2}{2} \right) d\rho = H \cdot \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^R \left(\rho^2\cos\varphi + \rho^2\sin\varphi + \frac{\rho H}{2} \right) d\rho =$$

$$= H \cdot \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\rho^3}{3}\cos\varphi + \frac{\rho^3}{3}\sin\varphi + \frac{\rho^2 H}{4} \right)\Bigg|_0^R d\varphi = H \cdot \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{R^3}{3}\cos\varphi + \frac{R^3}{3}\sin\varphi + \frac{R^2 H}{4} \right) d\varphi =$$

$$= HR^2 \cdot \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{R}{3}\cos\varphi + \frac{R}{3}\sin\varphi + \frac{H}{4} \right) d\varphi = HR^2 \cdot \left(\frac{R}{3}\sin\varphi - \frac{R}{3}\cos\varphi + \frac{H\varphi}{4} \right)\Bigg|_0^{\pi/2} = H R^2 \cdot \left(\frac{\pi H}{8} + \frac{2R}{3} \right).$$

Ответ: $H R^2 \cdot \left(\frac{\pi H}{8} + \frac{2R}{3} \right)$.