

Условие

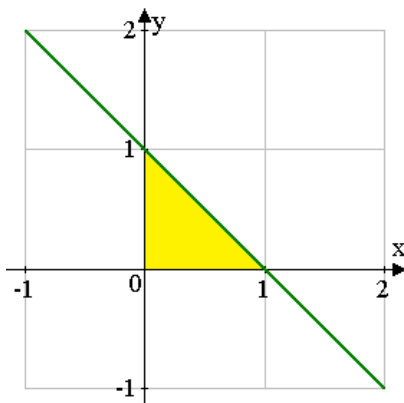
Найти $\iint_S xz dx dy + xy dy dz + yz dx dz$, где S – внешняя сторона пирамиды, составленной плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$.

Решение

Для данного тела имеем: $0 \leq z \leq 1-x-y$. Применим формулу Остроградского-Гаусса:

$$\iint_S xz dx dy + xy dy dz + yz dx dz = \iiint_V \left(\frac{\partial(xy)}{\partial x} + \frac{\partial(yz)}{\partial y} + \frac{\partial(xz)}{\partial z} \right) dx dy dz = \iiint_V (y+z+x) dx dy dz$$

В проекции на плоскость Oxy получим область D , ограниченную прямой $x+y=1$, т.е. $y=1-x$, и осями координат:



Для данной области имеем: $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1-x$.

$$\begin{aligned} \iiint_V (y+z+x) dx dy dz &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} (x+y+z) d(x+y+z) = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{(x+y+z)^2}{2} \Big|_0^{1-x-y} dy = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1-(x+y)^2) dy = \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy - \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x+y)^2 dy \end{aligned}$$

Интеграл $\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy$ равен площади области D , т.е. $\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy = \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy - \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x+y)^2 dy &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x+y)^2 d(x+y) = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} \cdot \int_0^1 (x+y)^3 \Big|_0^{1-x} dx = \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{6} \cdot \int_0^1 (1-x^3) dx = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} \cdot \left(x - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{1}{8}$.