Решение задачи скачано с сайта AMKbook.Net
AMKbook.Net – занятия, решебник и учебные материалы по высшей математике и математическому анализу.

Условие

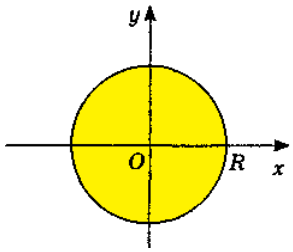
Найти $\iint\limits_S x^2y^2\,dq$, где S – полусфера $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$.

Решение

$$z'_x=-\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},\ z'_y=-\frac{y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}.$$

$$dq=\sqrt{1+\left(z'_x\right)^2+\left(z'_y\right)^2}\,dxdy=\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2-y^2}+\frac{y^2}{R^2-x^2-y^2}}\,dxdy=\frac{R\,dxdy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}.$$

В проекции на плоскость Oxy получим область D, ограниченную окружностью $x^2+y^2=R^2$ с центром в начале координат и радиусом R. В полярной системе координат уравнение окружности будет таким: $\rho=R$.



Для области D получим: $0\le\varphi\le 2\pi$, $0\le\rho\le R$.

$$\iint\limits_S x^2y^2\,dq=R\cdot\iint\limits_D\frac{x^2y^2dxdy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}=R\cdot\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^R\frac{\rho^5\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\sqrt{R^2-\rho^2}}d\rho=R\cdot\int\limits_0^{2\pi}\sin^2\varphi\cos^2\varphi d\varphi\int\limits_0^R\frac{\rho^5d\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}}=$$

$$=R\cdot\int\limits_0^{2\pi}\left(\sin\varphi\cos\varphi\right)^2d\varphi\int\limits_0^R\frac{\rho^5d\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}}=\frac{R}{4}\cdot\int\limits_0^{2\pi}\sin^2 2\varphi d\varphi\int\limits_0^R\frac{\rho^5d\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}}=\frac{R}{8}\cdot\int\limits_0^{2\pi}\left(1-\cos 2\varphi\right)d\varphi\int\limits_0^R\frac{\rho^5d\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}}=$$

$$=\frac{R}{8}\cdot\left(\varphi-\frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi}\cdot\int\limits_0^R\frac{\rho^5d\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}}=\frac{\pi R}{4}\cdot\int\limits_0^R\frac{\rho^5d\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}}=-\frac{\pi R}{8}\cdot\int\limits_0^R\frac{\rho^4d\left(R^2-\rho^2\right)}{\sqrt{R^2-\rho^2}}=$$

$$=-\frac{\pi R}{8}\cdot\int\limits_0^R\frac{\left(R^2-\rho^2-R^2\right)^2d\left(R^2-\rho^2\right)}{\sqrt{R^2-\rho^2}}=\left[\begin{array}{l|c|c}t=R^2-\rho^2; & & \\ \hline \rho & 0 & R \\ \hline t & R^2 & 0\end{array}\right]=-\frac{\pi R}{8}\cdot\int\limits_{R^2}^0\frac{\left(t-R^2\right)^2dt}{\sqrt{t}}=$$

$$=\frac{\pi R}{8}\cdot\int\limits_0^{R^2}\frac{t^2-2tR^2+R^4}{\sqrt{t}}dt=\frac{\pi R}{8}\cdot\int\limits_0^{R^2}\left(t^{\frac{3}{2}}-2R^2t^{\frac{1}{2}}+R^4\cdot t^{-\frac{1}{2}}\right)dt=\frac{\pi R}{8}\cdot\left(\frac{2t^{\frac{5}{2}}}{5}-\frac{4R^2t^{\frac{3}{2}}}{3}+2R^4\cdot t^{\frac{1}{2}}\right)\Bigg|_0^{R^2}=\frac{2\pi R^6}{15}.$$

Ответ: $\dfrac{2\pi R^6}{15}$.