

Условие

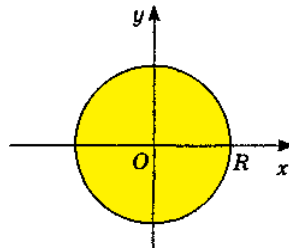
Найти $\iint_S y dq$, где S – полусфера $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$.

Решение

$$z'_x = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}, \quad z'_y = -\frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}.$$

$$dq = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy = \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy = \frac{R dx dy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}.$$

В проекции на плоскость Oxy получим область D , ограниченную окружностью $x^2 + y^2 = R^2$ с центром в начале координат и радиусом R .



Для области D получим: $-R \leq x \leq R$, $-\sqrt{R^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{R^2 - x^2}$.

$$\begin{aligned} \iint_S y dq &= R \cdot \iint_D \frac{y dx dy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} = R \cdot \int_{-R}^R dx \int_{-\sqrt{R^2 - x^2}}^{\sqrt{R^2 - x^2}} \frac{y dy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} = -\frac{R}{2} \cdot \int_{-R}^R dx \int_{-\sqrt{R^2 - x^2}}^{\sqrt{R^2 - x^2}} (R^2 - x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}} d(R^2 - x^2 - y^2) = \\ &= -R \cdot \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \Big|_{-\sqrt{R^2 - x^2}}^{\sqrt{R^2 - x^2}} dx = -R \cdot \int_{-R}^R \left(\sqrt{R^2 - x^2 - (R^2 - x^2)} - \sqrt{R^2 - x^2 - (R^2 - x^2)} \right) dx = R \cdot \int_{-R}^R 0 dx = 0 \end{aligned}$$

Ответ: 0.