

Условие

Найти центр масс однородного тела, ограниченного параболоидом $z = \frac{x^2 + y^2}{2a}$ и сферой $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$ ($z \geq 0$).

Решение

Так как $z \geq 0$, то из равенства $z = \frac{x^2 + y^2}{2a}$ ввиду $x^2 + y^2 \geq 0$ имеем $a > 0$. Найдём линию пересечения сферы и параболоида:

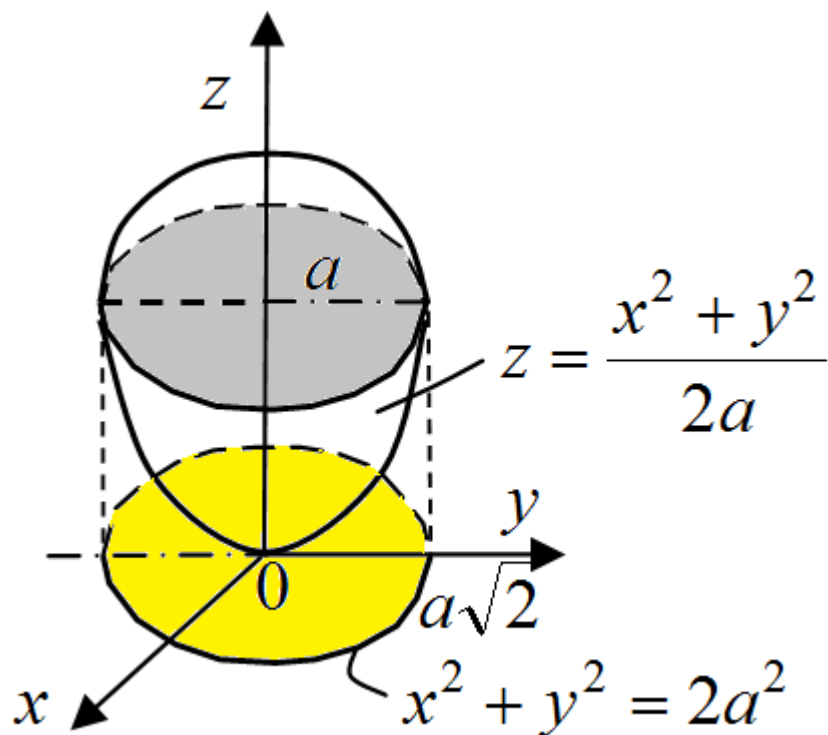
$$\begin{cases} \frac{x^2 + y^2}{2a} = z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2 \end{cases}$$

Из первого уравнения имеем: $x^2 + y^2 = 2az$. Подставляя во второе уравнение, получим:

$$2az + z^2 = 3a^2, \quad z^2 + 2az + a^2 = 4a^2, \quad (z + a)^2 = 4a^2, \quad |z + a| = 2a.$$

Так как $z \geq 0$, $a > 0$, то $z + a = 2a$, $z = a$. Поверхности пересекаются по окружности $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2a^2 \\ z = a \end{cases}$. Область, ограниченная данной окружностью, показана на рисунке серым цветом.

Область, ограниченная проекцией данной окружности на плоскость Oxy , показана жёлтым цветом:



Пусть $(x_C; y_C; z_C)$ – искомый центр масс. Так как тело однородно и симметрично относительно оси Oz , то $x_C = y_C = 0$.

Перейдём в цилиндрическую систему координат:

$$\begin{aligned} z &= \frac{x^2 + y^2}{2a} \Rightarrow z = \frac{\rho^2}{2a} \\ z &= \sqrt{3a^2 - (x^2 + y^2)} \Rightarrow z = \sqrt{3a^2 - \rho^2} . \\ x^2 + y^2 &= 2a^2 \Rightarrow \rho^2 = 2a^2; \rho = a\sqrt{2} . \end{aligned}$$

Для данного тела имеем: $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \rho \leq a\sqrt{2}$, $\frac{\rho^2}{2a} \leq z \leq \sqrt{3a^2 - \rho^2}$.

$$\begin{aligned} M &= \gamma \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{a\sqrt{2}} \rho d\rho \int_{\frac{\rho^2}{2a}}^{\sqrt{3a^2 - \rho^2}} dz = \gamma \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{a\sqrt{2}} \rho \cdot z \Big|_{\frac{\rho^2}{2a}}^{\sqrt{3a^2 - \rho^2}} d\rho = \gamma \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{a\sqrt{2}} \rho \cdot \left(\sqrt{3a^2 - \rho^2} - \frac{\rho^2}{2a} \right) d\rho = \\ &= \gamma \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^{a\sqrt{2}} \rho \cdot \left(\sqrt{3a^2 - \rho^2} - \frac{\rho^2}{2a} \right) d\rho = 2\pi\gamma \cdot \left(\int_0^{a\sqrt{2}} \rho \cdot \sqrt{3a^2 - \rho^2} d\rho - \int_0^{a\sqrt{2}} \frac{\rho^3}{2a} d\rho \right) = \\ &= 2\pi\gamma \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot \int_0^{a\sqrt{2}} (3a^2 - \rho^2)^{\frac{1}{2}} d(3a^2 - \rho^2) - \frac{1}{8a} \cdot \rho^4 \Big|_0^{a\sqrt{2}} \right) = 2\pi\gamma \cdot \left(-\frac{1}{3} \cdot (3a^2 - \rho^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{a\sqrt{2}} - \frac{1}{8a} \cdot 4a^4 \right) = \\ &= 2\pi\gamma \cdot \left(-\frac{1}{3} \cdot (a^3 - 3\sqrt{3} \cdot a^3) - \frac{a^3}{2} \right) = \frac{\pi a^3 \gamma}{3} \cdot (6\sqrt{3} - 5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{xy} &= \gamma \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{a\sqrt{2}} \rho d\rho \int_{\frac{\rho^2}{2a}}^{\sqrt{3a^2 - \rho^2}} z dz = \frac{\gamma}{2} \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{a\sqrt{2}} \rho \cdot z^2 \Big|_{\frac{\rho^2}{2a}}^{\sqrt{3a^2 - \rho^2}} d\rho = \frac{\gamma}{2} \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{a\sqrt{2}} \rho \cdot \left(3a^2 - \rho^2 - \frac{\rho^4}{4a^2} \right) d\rho = \\ &= \frac{\gamma}{2} \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^{a\sqrt{2}} \left(3a^2 \rho - \rho^3 - \frac{\rho^5}{4a^2} \right) d\rho = \frac{\gamma}{2} \cdot \varphi \Big|_0^{2\pi} \cdot \left(\frac{3a^2 \rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4} - \frac{\rho^6}{24a^2} \right) \Big|_0^{a\sqrt{2}} = \frac{\gamma}{2} \cdot 2\pi \cdot \frac{5a^4}{3} = \frac{5\pi \gamma a^4}{3} . \end{aligned}$$

$$z_C = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{\frac{5\pi \gamma a^4}{3}}{\frac{\pi a^3 \gamma}{3} \cdot (6\sqrt{3} - 5)} = \frac{5a}{6\sqrt{3} - 5} .$$

Следовательно, искомый центр масс есть точка $\left(0; 0; \frac{5a}{6\sqrt{3} - 5} \right)$.

Ответ: $\left(0; 0; \frac{5a}{6\sqrt{3} - 5} \right)$.