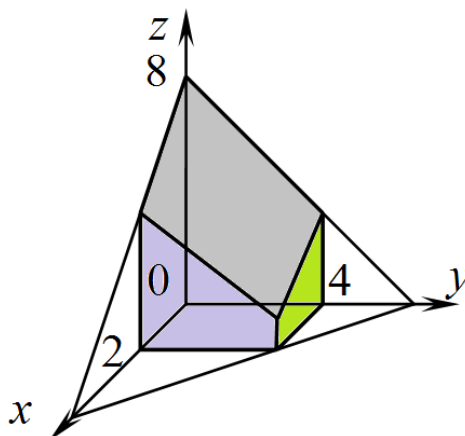


Условие

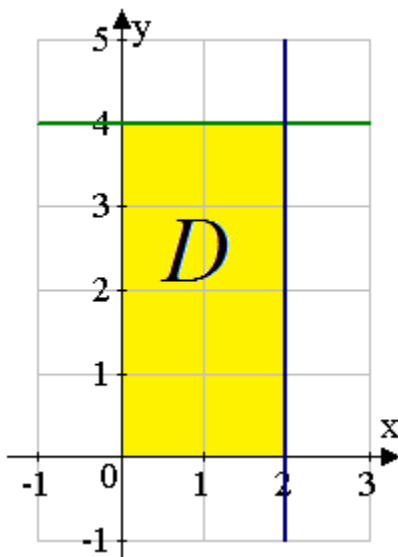
Найти центр масс однородного тела, ограниченного плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x=2$, $y=4$, $x+y+z=8$ (усечённый параллелепипед).

Решение

Плоскость $x+y+z=8$ отсекает на осях координат отрезки равные 8 (в первом октанте):



Для данного тела имеем: $0 \leq z \leq 8-x-y$. В проекции на плоскость Oxy получим область D , ограниченную осями координат и прямыми $x=2$, $y=4$:



Для области D имеем: $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 4$.

$$\begin{aligned}
 M &= \iiint_G \gamma(x, y, z) dx dy dz = \gamma \cdot \int_0^2 dx \int_0^4 dy \int_0^{8-x-y} dz = \gamma \cdot \int_0^2 dx \int_0^4 z \Big|_0^{8-x-y} dy = \gamma \cdot \int_0^2 dx \int_0^4 (8-x-y) dy = \\
 &= \gamma \cdot \int_0^2 \left(8y - xy - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^4 dx = \gamma \cdot \int_0^2 (24 - 4x) dx = \gamma \cdot (24x - 2x^2) \Big|_0^2 = 40\gamma.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{xy} &= \iiint_G z\gamma(x, y, z) dx dy dz = \gamma \cdot \int_0^2 dx \int_0^4 dy \int_0^{8-x-y} z dz = \gamma \cdot \int_0^2 dx \int_0^4 \frac{z^2}{2} \Big|_0^{8-x-y} dy = \frac{\gamma}{2} \cdot \int_0^2 dx \int_0^4 (8-x-y)^2 dy = \\
&= \frac{\gamma}{2} \cdot \int_0^2 dx \int_0^4 (x+y-8)^2 d(x+y-8) = \frac{\gamma}{2} \cdot \int_0^2 \frac{(x+y-8)^3}{3} \Big|_0^4 dx = \frac{\gamma}{6} \cdot \int_0^2 ((x-4)^3 - (x-8)^3) dx = \\
&= \gamma \cdot \int_0^2 \left(2x^2 - 24x + \frac{224}{3} \right) dx = \gamma \cdot \left(\frac{2x^3}{3} - 12x^2 + \frac{224x}{3} \right) \Big|_0^2 = \frac{320\gamma}{3}. \\
M_{xz} &= \iiint_G y\gamma(x, y, z) dx dy dz = \gamma \cdot \int_0^2 dx \int_0^4 y dy \int_0^{8-x-y} dz = \gamma \cdot \int_0^2 dx \int_0^4 y \cdot z \Big|_0^{8-x-y} dy = \gamma \cdot \int_0^2 dx \int_0^4 y \cdot (8-x-y) dy = \\
&= \gamma \cdot \int_0^2 dx \int_0^4 (8y - xy - y^2) dy = \gamma \cdot \int_0^2 \left(4y^2 - \frac{xy^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^4 dx = \gamma \cdot \int_0^2 \left(\frac{128}{3} - 8x \right) dx = \gamma \cdot \left(\frac{128x}{3} - 4x^2 \right) \Big|_0^2 = \frac{208\gamma}{3}. \\
M_{yz} &= \iiint_G x\gamma(x, y, z) dx dy dz = \gamma \cdot \int_0^2 x dx \int_0^4 dy \int_0^{8-x-y} dz = \gamma \cdot \int_0^2 x dx \int_0^4 z \Big|_0^{8-x-y} dy = \gamma \cdot \int_0^2 x dx \int_0^4 (8-x-y) dy = \\
&= \gamma \cdot \int_0^2 x \cdot \left(8y - xy - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^4 dx = \gamma \cdot \int_0^2 x \cdot (24 - 4x) dx = \gamma \cdot \int_0^2 (24x - 4x^2) dx = \gamma \cdot \left(12x^2 - \frac{4x^3}{3} \right) \Big|_0^2 = \frac{112\gamma}{3}.
\end{aligned}$$

Координаты центра масс:

$$x_C = \frac{M_{yz}}{M} = \frac{14}{15}, \quad y_C = \frac{M_{xz}}{M} = \frac{26}{15}, \quad z_C = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{8}{3}.$$

Ответ: $\left(\frac{14}{15}; \frac{26}{15}; \frac{8}{3} \right)$.