

Условие

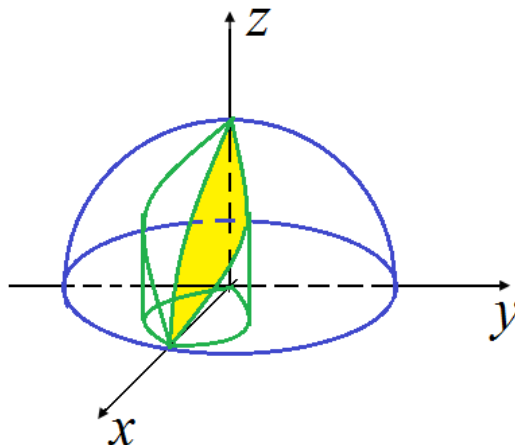
Найти площадь части поверхности $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, вырезанной цилиндром $x^2 + y^2 = Rx$.

Решение

Уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ определяет сферу с центром в начале координат и радиусом R . Запишем уравнение цилиндра в такой форме:

$$x^2 - Rx + y^2 = 0, \quad x^2 - Rx + \frac{R^2}{4} + y^2 = \frac{R^2}{4}, \quad \left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{R^2}{4}.$$

Следовательно, уравнение $x^2 + y^2 = Rx$ определяет прямой круговой цилиндр, в проекции которого на плоскость Oxy получим окружность с центром в точке $\left(\frac{R}{2}; 0\right)$ и радиусом $\frac{R}{2}$. Пусть S_1 – площадь, вырезанная из сферы цилиндром в первом октанте. Так как и сфера и цилиндр симметричны относительно плоскостей Oxy и Oxz , то вся вырезанная площадь $S = 4S_1$. Площадь S_1 выделена жёлтым цветом:



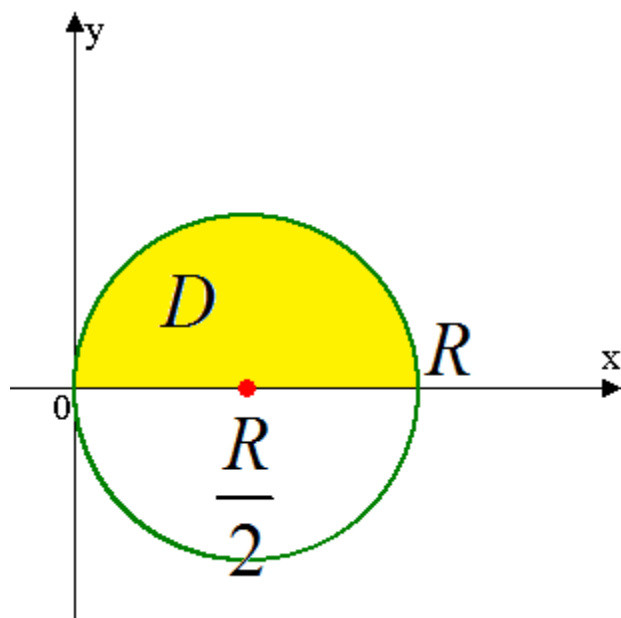
Дифференцируя уравнение сферы по x и по y , получим:

$$2x + 2z \cdot z'_x = 0, \quad z'_x = -\frac{x}{z}.$$

$$2y + 2z \cdot z'_y = 0, \quad z'_y = -\frac{y}{z}.$$

$$1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2 = 1 + \frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{z^2} = \frac{R^2}{R^2 - (x^2 + y^2)}.$$

Проекция области S_1 на плоскость Oxy :



Перейдём в полярную систему координат:

$$x^2 + y^2 = Rx, \quad \rho^2 = R\rho \cos \varphi, \quad \rho = R \cos \varphi.$$

Для области D имеем: $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \rho \leq R \cos \varphi$.

$$\begin{aligned} S &= 4S_1 = 4 \cdot \iint_D \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy = 4R \cdot \iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}} = 4R \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{R \cos \varphi} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} = \\ &= -2R \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{R \cos \varphi} (R^2 - \rho^2)^{-\frac{1}{2}} d(R^2 - \rho^2) = -4R \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{R^2 - \rho^2} \Big|_0^{R \cos \varphi} d\varphi = -4R \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sqrt{R^2 - R^2 \cos^2 \varphi} - R) d\varphi = \\ &= -4R^2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \varphi - 1) d\varphi = 4R^2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin \varphi) d\varphi = 4R^2 \cdot (\varphi + \cos \varphi) \Big|_0^{\pi/2} = 4R^2 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) = 2R^2 \cdot (\pi - 2). \end{aligned}$$

Ответ: $2R^2 \cdot (\pi - 2)$.