

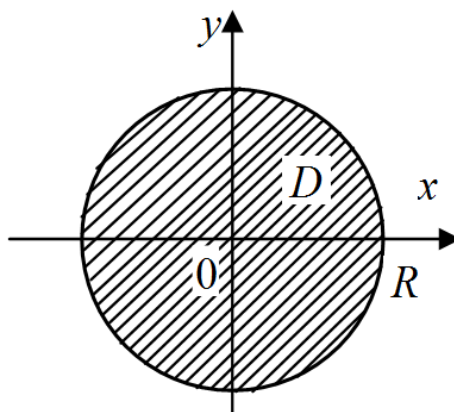
Условие

Найти площадь части поверхности $z = xy$, вырезанной цилиндром $x^2 + y^2 = R^2$.

Решение

$$z'_x = y, \quad z'_y = x.$$

В проекции на плоскость Oxy получим область D , ограниченную окружностью $x^2 + y^2 = R^2$ с центром в начале координат и радиусом R .



Уравнение окружности $x^2 + y^2 = R^2$ в полярной системе координат будет таким:

$$\rho^2 = R^2, \quad \rho = R.$$

Для области D получим: $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \rho \leq R$.

$$\begin{aligned} S &= \iint_D \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} \, dx dy = \iint_D \sqrt{1 + x^2 + y^2} \, dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho \sqrt{1 + \rho^2} \, d\rho = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R (1 + \rho^2)^{\frac{1}{2}} d(1 + \rho^2) = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \int_0^{2\pi} (1 + \rho^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^R d\varphi = \frac{(1 + R^2)^{\frac{3}{2}} - 1}{3} \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{(1 + R^2)^{\frac{3}{2}} - 1}{3} \cdot \varphi \Big|_0^{2\pi} = \frac{2\pi}{3} \cdot \left((1 + R^2)^{\frac{3}{2}} - 1 \right). \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{2\pi}{3} \cdot \left((1 + R^2)^{\frac{3}{2}} - 1 \right).$