

Условие

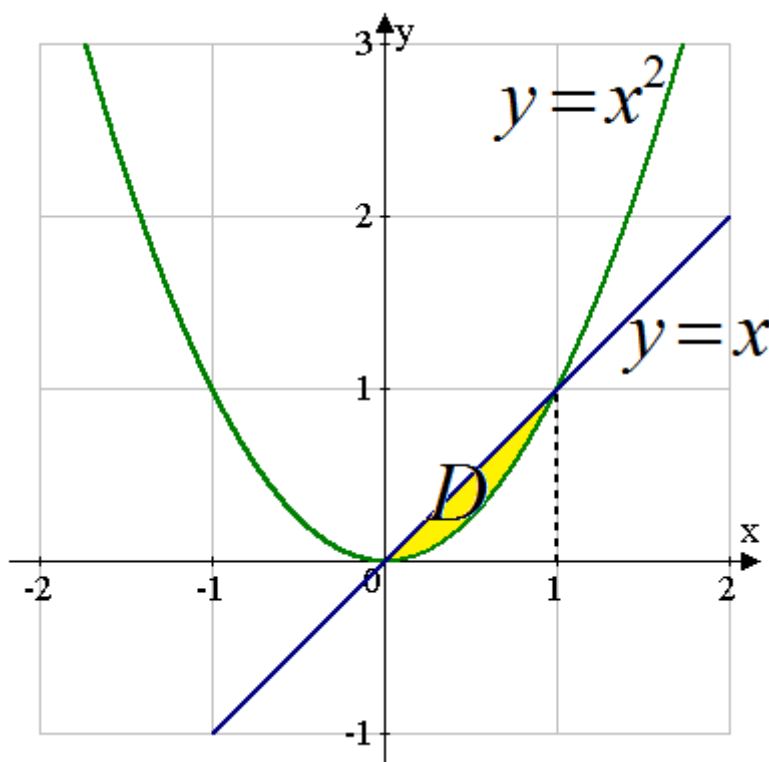
Вычислить тройным интегрированием объём тела, ограниченного параболоидами $z = x^2 + y^2$, $z = 2x^2 + 2y^2$, цилиндром $y = x^2$ и плоскостью $y = x$.

Решение

Для данного тела получим: $x^2 + y^2 \leq z \leq 2x^2 + 2y^2$. В проекции на плоскость Oxy получим область D , ограниченную параболой $y = x^2$ и прямой $y = x$. Найдём точки пересечения данных линий:

$$x^2 = x, \quad x \cdot (x-1) = 0, \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Графики пересекаются в точках $(0;0)$ и $(1;1)$.



Для области D получим: $0 \leq x \leq 1, \quad x^2 \leq y \leq x$.

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 dx \int_{x^2}^x dy \int_{x^2+y^2}^{2x^2+2y^2} dz = \int_0^1 dx \int_{x^2}^x z \Big|_{x^2+y^2}^{2x^2+2y^2} dy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^x (x^2 + y^2) dy = \int_0^1 \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{x^2}^x dx = \\ &= \int_0^1 \left(x^3 + \frac{x^3}{3} - x^4 - \frac{x^6}{3} \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{4x^3}{3} - x^4 - \frac{x^6}{3} \right) dx = \left(\frac{x^4}{3} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{21} \right) \Big|_0^1 = \frac{3}{35}. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{3}{35}$.