

Условие

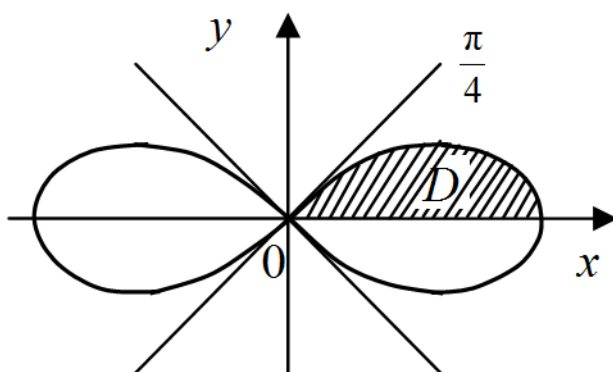
Найти двойным интегрированием площадь области, ограниченной линией $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2 \cdot (x^2 - y^2)$ (лемниската Бернулли).

Решение

Пусть точка $(x_0; y_0)$ принадлежит данной кривой. Так как $x_0^2 = (-x_0)^2$, $y_0^2 = (-y_0)^2$, то одновременно с точкой $(x_0; y_0)$ данной кривой принадлежат точки $(-x_0; y_0)$, $(x_0; -y_0)$, $(-x_0; -y_0)$. Это значит, что кривая симметрична относительно осей координат и относительно начала координат. Ввиду симметрии кривой можно рассмотреть часть области, ограниченной данной линией, лежащей в первой четверти. Перейдём в полярную систему координат:

$$(\rho^2)^2 = 2a^2 \cdot (\rho^2 \cos^2 \varphi - \rho^2 \sin^2 \varphi), \quad \rho^4 = 2a^2 \rho^2 \cdot (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi), \quad \rho^2 = 2a^2 \cdot \cos 2\varphi.$$

Так как $\rho^2 \geq 0$, то $\cos 2\varphi \geq 0$, т.е. $-\frac{\pi}{2} + 2\pi m \leq 2\varphi \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi m$, $-\frac{\pi}{4} + \pi m \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} + \pi m$. Для части лемнискаты, расположенной в первой четверти, имеем: $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$.



Для области D получим: $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$, $0 \leq \rho \leq \sqrt{2a^2 \cos 2\varphi}$.

$$\begin{aligned} S &= 4 \cdot \iint_D \rho d\rho d\varphi = 4 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\sqrt{2a^2 \cos 2\varphi}} \rho d\rho = 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \rho^2 \Big|_0^{\sqrt{2a^2 \cos 2\varphi}} d\varphi = 4a^2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\varphi d\varphi = \\ &= 2a^2 \cdot \sin 2\varphi \Big|_0^{\pi/4} = 2a^2 \cdot (1 - 0) = 2a^2. \end{aligned}$$

Ответ: $2a^2$.