

Условие

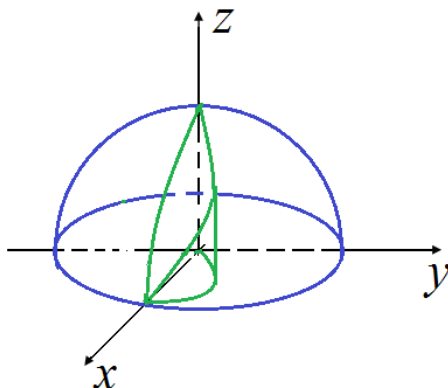
Найти двойным интегрированием объём тела, ограниченного сферой $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ и цилиндром $x^2 + y^2 = ax$ (задача Вивиани).

Решение

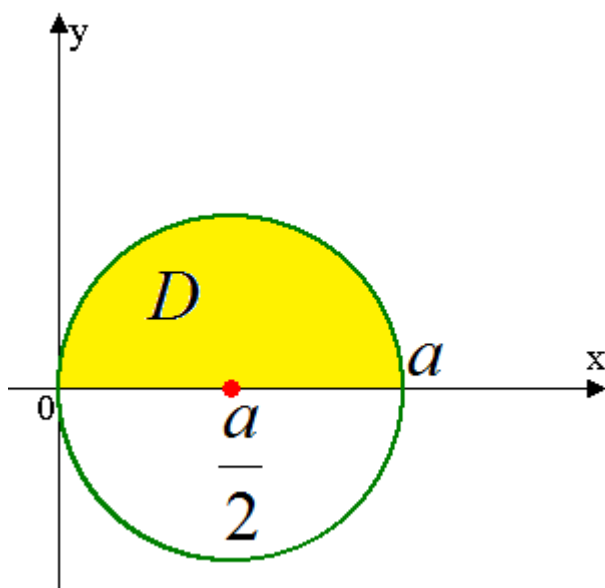
Уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ определяет сферу с центром в начале координат и радиусом $R = a$. Запишем уравнение цилиндра в такой форме:

$$x^2 - ax + y^2 = 0, \quad x^2 - ax + \frac{a^2}{4} + y^2 = \frac{a^2}{4}, \quad \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}.$$

Следовательно, уравнение $x^2 + y^2 = ax$ определяет прямой круговой цилиндр, в проекции которого на плоскость Oxy получим окружность с центром в точке $\left(\frac{a}{2}; 0\right)$ и радиусом $R = \frac{a}{2}$. Пусть V_1 – часть искомого объёма, расположенная в первом октанте. Так как и сфера и цилиндр симметричны относительно плоскостей Oxy и Oxz , то весь объём $V = 4V_1$. Объём V_1 показан на рисунке:



Проекция данного тела на плоскость Oxy :



Перейдём в полярную систему координат:

$$x^2 + y^2 = ax, \quad \rho^2 = a\rho \cos \varphi, \quad \rho = a \cos \varphi.$$

Для области D имеем: $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \rho \leq a \cos \varphi$.

$$\begin{aligned} V &= 4V_1 = 4 \cdot \iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy = 4 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a \cos \varphi} \rho \sqrt{a^2 - \rho^2} d\rho = \\ &= -2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a \cos \varphi} (a^2 - \rho^2)^{\frac{1}{2}} d(a^2 - \rho^2) = -\frac{4}{3} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a^2 - \rho^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{a \cos \varphi} d\varphi = -\frac{4}{3} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left((a^2 - a^2 \cos^2 \varphi)^{\frac{3}{2}} - a^3 \right) d\varphi = \\ &= \frac{4a^3}{3} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 \varphi) d\varphi = \frac{4a^3}{3} \cdot \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi d\varphi \right) = \frac{4a^3}{3} \cdot \left(\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi \cdot \sin \varphi d\varphi \right) = \\ &= \frac{4a^3}{3} \cdot \left(\frac{\pi}{2} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 \varphi) d(\cos \varphi) \right) = \frac{4a^3}{3} \cdot \left(\frac{\pi}{2} + \left(\cos \varphi - \frac{\cos^3 \varphi}{3} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) = \frac{4a^3}{3} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right). \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{4a^3}{3} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right).$