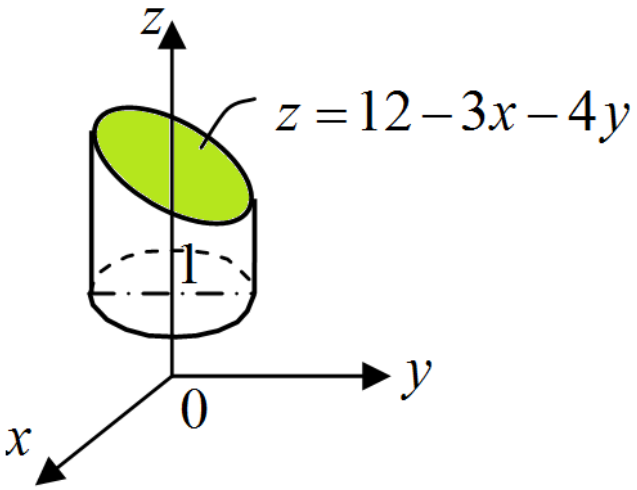
Решение задачи скачано с сайта AMKbook.Net
AMKbook.Net – занятия, решебник и учебные материалы по высшей математике и математическому анализу.

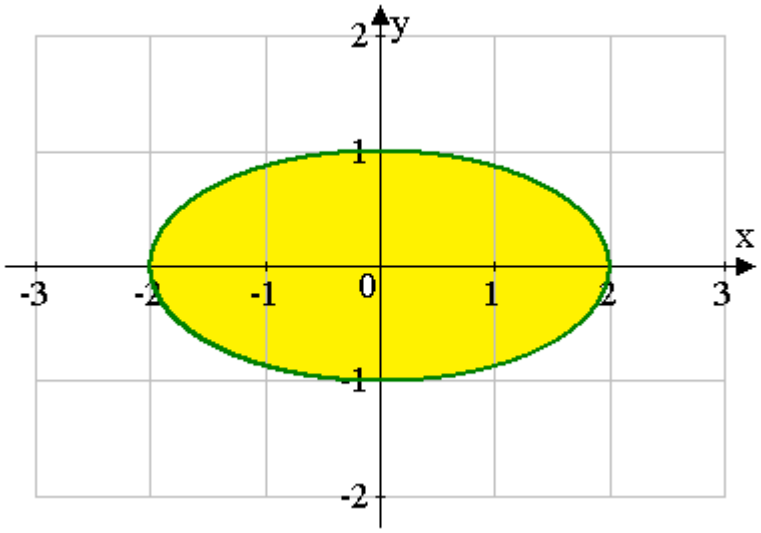
Условие

Найти двойным интегрированием объём тела, ограниченного эллиптическим цилиндром $\frac{x^2}{4}+y^2=1$, плоскостями $z=12-3x-4y$ и $z=1$.

Решение



В проекции на плоскость Oxy получим область, ограниченную эллипсом $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ с полуосями $a=2$, $b=1$:



Для данного тела имеем: $-2\le x\le 2$, $-\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\le y\le\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$, $1\le z\le 12-3x-4y$.

$$V=\int\limits_{-2}^{2}dx\int\limits_{-\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}^{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}\left(12-3x-4y-1\right)dy=\int\limits_{-2}^{2}dx\int\limits_{-\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}^{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}\left(11-3x-4y\right)dy=\int\limits_{-2}^{2}\left(\left(11-3x\right)y-2y^2\right)\Big|_{-\sqrt{1-x^2/4}}^{\sqrt{1-x^2/4}}dx=$$

$$=\int\limits_{-2}^{2}2\cdot\left(11-3x\right)\cdot\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}dx=22\cdot\int\limits_{-2}^{2}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}dx-6\cdot\int\limits_{-2}^{2}x\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}dx=44\cdot\int\limits_{0}^{2}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}dx-6\cdot0=22\cdot\int\limits_{0}^{2}\sqrt{4-x^2}dx=$$

$$=\left[\begin{array}{l}x=2\sin t;\ dx=2\cos tdt.\\ \begin{array}{c|c|c}x & 0 & 2\\ t & 0 & \frac{\pi}{2}\end{array}\end{array}\right]=22\cdot\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}2\cos t\cdot2\cos tdt=88\cdot\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 tdt=44\cdot\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\cos2t\right)dt=44\cdot\left(t+\frac{\sin2t}{2}\right)\Big|_{0}^{\pi/2}=22\pi.$$

Ответ: 22π .