

Условие

Найти двойным интегрированием объём тела, ограниченного цилиндром $2y^2 = x$ и плоскостями $\frac{x}{4} + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} = 1$, $z = 0$.

Решение

Из уравнения $\frac{x}{4} + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} = 1$ получим: $z = 4 \cdot \left(1 - \frac{x}{4} - \frac{y}{2}\right) = 4 - x - 2y$. Для данного тела имеем $0 \leq z \leq 4 - x - 2y$.

В проекции на плоскость Oxy получим область, ограниченную параболой $2y^2 = x$ и прямой $\frac{x}{4} + \frac{y}{2} = 1$. Найдём точки пересечения параболы $x = 2y^2$ и заданной прямой.

$$\begin{cases} x = 2y^2 \\ \frac{x}{4} + \frac{y}{2} = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2y^2 \\ x = 4 - 2y \end{cases}$$

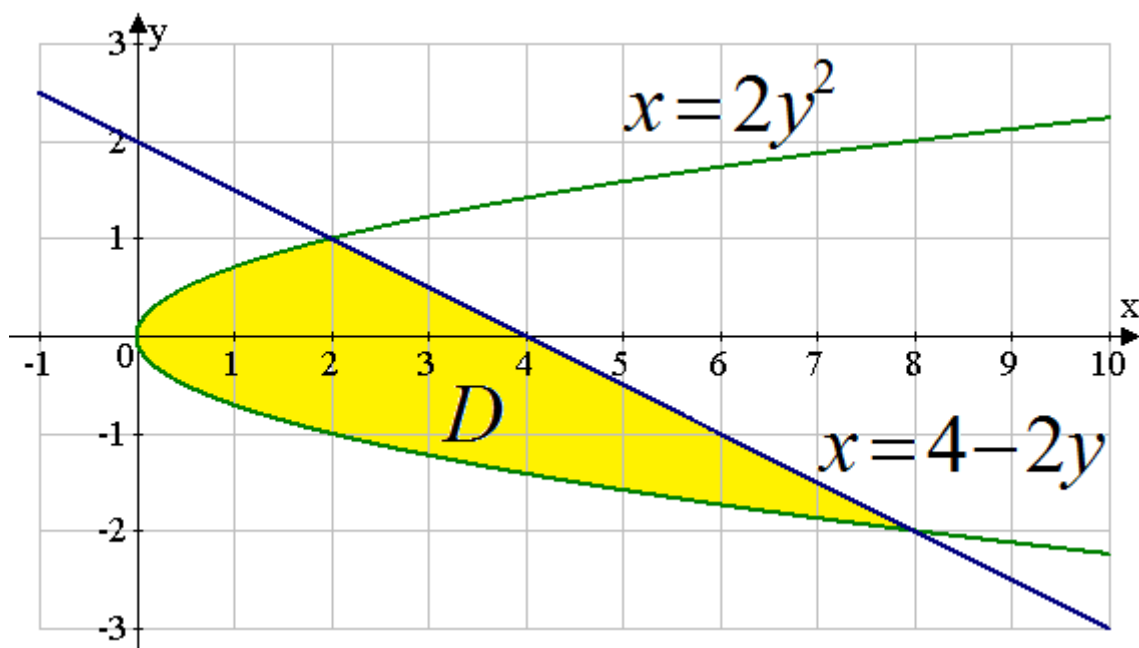
$$2y^2 = 4 - 2y$$

$$y^2 + y - 2 = 0$$

$$D = 1 + 8 = 9;$$

$$y_1 = \frac{-1-3}{2} = -2; \quad y_2 = \frac{-1+3}{2} = 1.$$

График и пересекаются в точках $(8; -2)$ и $(2; 1)$.



$$D: -2 \leq y \leq 1; \quad 2y^2 \leq x \leq 4 - 2y.$$

$$V = \iint_D (4 - x - 2y) dx dy = \int_{-2}^1 dy \int_{2y^2}^{4-2y} (4 - x - 2y) dx = \int_{-2}^1 \left(4x - \frac{x^2}{2} - 2xy \right) \bigg|_{2y^2}^{4-2y} dy =$$

$$= \int_{-2}^1 (2y^4 + 4y^3 - 6y^2 - 8y + 8) dy = \left(\frac{2y^5}{5} + y^4 - 2y^3 - 4y^2 + 8y \right) \bigg|_{-2}^1 = \frac{81}{5}.$$

Ответ: $\frac{81}{5}$.