

Условие

Найти двойным интегрированием объём тела, ограниченного плоскостями $y = 0$, $z = 0$, $3x + y = 6$, $3x + 2y = 12$, $x + y + z = 6$.

Решение

Плоскости $3x + y = 6$ и $3x + 2y = 12$ перпендикулярны плоскости Oxy (т.е. $z = 0$). В проекции на плоскость Oxy получим прямые $3x + y = 6$ и $3x + 2y = 12$. Найдём точку их пересечения:

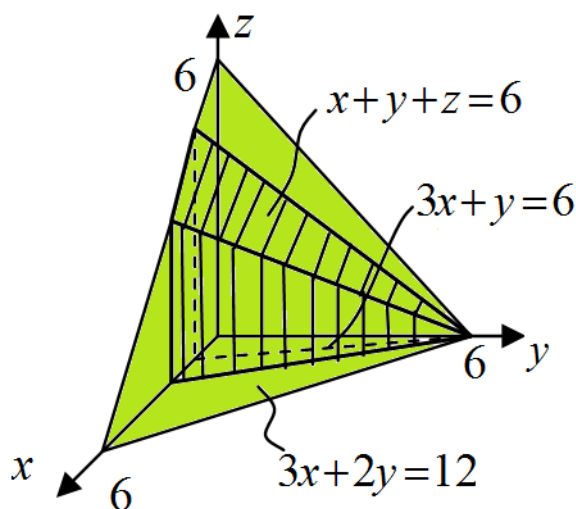
$$\begin{cases} 3x + y = 6 \\ 3x + 2y = 12 \end{cases}$$

$$3x + 2y - (3x + y) = 12 - 6; \quad y = 6; \quad x = \frac{6 - y}{3} = 0.$$

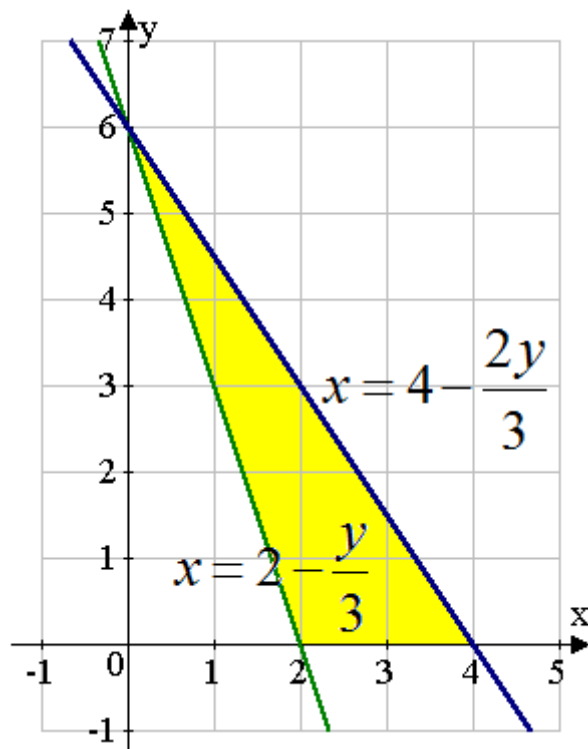
Точка пересечения: $(0; 6)$.

Прямые $3x + y = 6$ и $3x + 2y = 12$ пересекают ось Ox (прямую $y = 0$) в точках соответственно $(2; 0)$ и $(4; 0)$.

Плоскость $x + y + z = 6$ пересекает оси координат в точках $(6; 0; 0)$, $(0; 6; 0)$ и $(0; 0; 6)$. Следовательно, искомое тело будет таким:



В проекции на плоскости Oxy получим:



Для данного тела имеем: $0 \leq y \leq 6$, $2 - \frac{y}{3} \leq x \leq 4 - \frac{2y}{3}$, $0 \leq z \leq 6 - x - y$.

$$\begin{aligned}
 V &= \int_0^6 dy \int_{2-\frac{y}{3}}^{4-\frac{2y}{3}} (6-x-y) dx = \int_0^6 \left(6x - \frac{x^2}{2} - xy \right) \Big|_{2-\frac{y}{3}}^{4-\frac{2y}{3}} dy = \\
 &= \int_0^6 \left(6 \cdot \left(4 - \frac{2y}{3} \right) - \frac{\left(4 - \frac{2y}{3} \right)^2}{2} - \left(4 - \frac{2y}{3} \right) \cdot y - 6 \cdot \left(2 - \frac{y}{3} \right) + \frac{\left(2 - \frac{y}{3} \right)^2}{2} + \left(2 - \frac{y}{3} \right) \cdot y \right) dy = \\
 &= \int_0^6 \left(6 \cdot \left(2 - \frac{y}{3} \right) - \frac{3}{2} \cdot \left(2 - \frac{y}{3} \right)^2 - \left(2 - \frac{y}{3} \right) \cdot y \right) dy = \int_0^6 \left(\frac{y^2}{6} - 2y + 6 \right) dy = \left(\frac{y^3}{18} - y^2 + 6y \right) \Big|_0^6 = 12.
 \end{aligned}$$

Ответ: 12.