

Условие

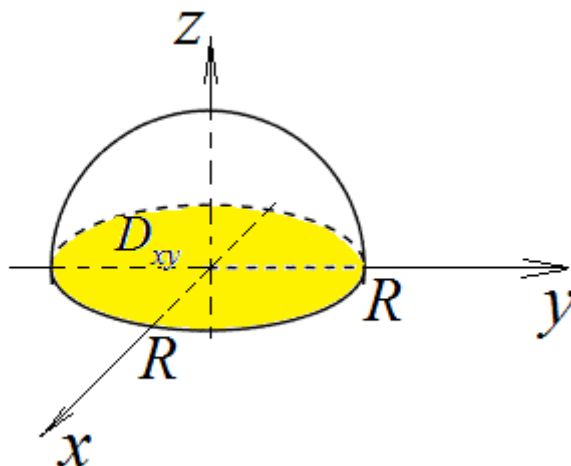
Вычислить интеграл $\int_{-R}^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} (x^2+y^2) dz$ с помощью перехода к цилиндрическим или сферическим координатам.

Решение

Для данного интеграла имеем:

$$-R \leq x \leq R, \quad -\sqrt{R^2-x^2} \leq y \leq \sqrt{R^2-x^2}, \quad 0 \leq z \leq \sqrt{R^2-x^2-y^2}.$$

Уравнение $z = \sqrt{R^2-x^2-y^2}$ определяет полусферу с центром в начале координат и радиусом R , расположенную над плоскостью Oxy . Неравенствам $-R \leq x \leq R, \quad -\sqrt{R^2-x^2} \leq y \leq \sqrt{R^2-x^2}$ удовлетворяют точки области D_{xy} , расположенные внутри окружности $x^2+y^2=R^2$ с центром в начале координат и радиусом R :



Перейдём в цилиндрическую систему координат:

$$z = \sqrt{R^2-x^2-y^2} = \sqrt{R^2-(x^2+y^2)}, \quad z = \sqrt{R^2-\rho^2}.$$

$$x^2+y^2=R^2, \quad \rho^2=R^2, \quad \rho=R.$$

Для данного тела получим: $0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \rho \leq R, \quad 0 \leq z \leq \sqrt{R^2-\rho^2}.$

$$\begin{aligned}
& \int_{-R}^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} (x^2+y^2) dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho^3 d\rho \int_0^{\sqrt{R^2-\rho^2}} dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho^3 \cdot z \Big|_0^{\sqrt{R^2-\rho^2}} d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho^3 \cdot \sqrt{R^2-\rho^2} d\rho = \\
& = \varphi \Big|_0^{2\pi} \cdot \frac{1}{2} \cdot \int_0^R (-\rho^2) \cdot \sqrt{R^2-\rho^2} d(R^2-\rho^2) = \pi \cdot \int_0^R (R^2-\rho^2-R^2) \cdot \sqrt{R^2-\rho^2} d(R^2-\rho^2) = \\
& = \pi \cdot \int_0^R \left((R^2-\rho^2)^{\frac{3}{2}} - R^2 \cdot (R^2-\rho^2)^{\frac{1}{2}} \right) d(R^2-\rho^2) = \pi \cdot \left(\frac{2(R^2-\rho^2)^{\frac{5}{2}}}{5} - R^2 \cdot \frac{2(R^2-\rho^2)^{\frac{3}{2}}}{3} \right) \Big|_0^R = \\
& = \pi \cdot \left(0 - \left(\frac{2R^5}{5} - \frac{2R^5}{3} \right) \right) = \frac{4\pi R^5}{15}.
\end{aligned}$$

Ответ: $\frac{4\pi R^5}{15}$.