

Условие

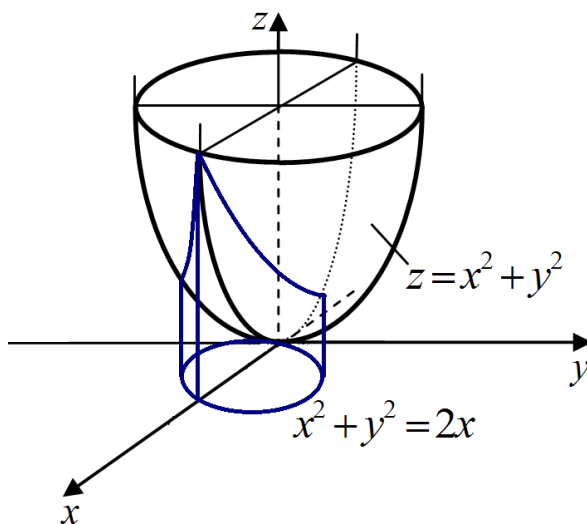
Перейти в тройном интеграле $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$ к цилиндрическим или сферическим координатам и расставить пределы интегрирования.

Ω – область, ограниченная цилиндром $x^2 + y^2 = 2x$, плоскостью $z = 0$ и параболоидом $z = x^2 + y^2$.

Решение

$$x^2 + y^2 = 2x, \quad x^2 - 2x + y^2 = 0, \quad (x-1)^2 + y^2 = 1.$$

Уравнение $x^2 + y^2 = 2x$ определяет круговой цилиндр, пересекающий плоскость $z = 0$ (плоскость Oxy) по окружности с центром в точке $(1; 0; 0)$ и радиусом $R = 1$.



Перейдём в цилиндрическую систему координат:

$$z = x^2 + y^2 \Rightarrow z = \rho^2$$

$$x^2 + y^2 = 2x \Rightarrow \rho^2 = 2\rho \cos \varphi; \quad \rho = 2 \cos \varphi$$

Тело Ω определяется такой системой неравенств:

$$-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \rho \leq 2 \cos \varphi, \quad 0 \leq z \leq \rho^2.$$

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2 \cos \varphi} d\rho \int_0^{\rho^2} \rho f(\rho \cos \varphi; \rho \sin \varphi; z) dz.$$