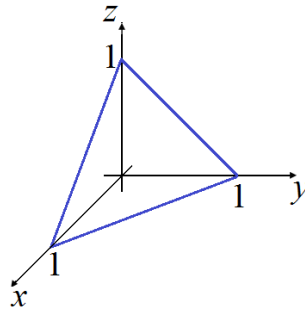


Условие

Вычислить интеграл $\iiint_{\Omega} \frac{dx dy dz}{(x+y+z+1)^3}$, где Ω – область, ограниченная плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$.

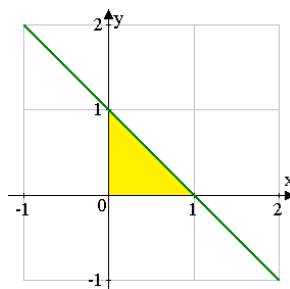
Решение

Плоскость $x+y+z=1$ пересекает оси координат в точках $(1;0;0)$, $(0;1;0)$ и $(0;0;1)$:



Для заданного тела получим: $0 \leq z \leq 1-x-y$.

В проекции на плоскость Oxy получим область, ограниченную прямой $y=1-x$ и осями координат:



Для данной области имеем: $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1-x$.

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{dx dy dz}{(x+y+z+1)^3} &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(x+y+z+1)^3} = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} (x+y+z+1)^{-3} d(x+y+z+1) = \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{1}{(x+y+z+1)^2} \Big|_0^{1-x-y} dy = -\frac{1}{2} \cdot \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{(x+y+1)^2} \right) dy = \\ &= -\frac{1}{8} \cdot \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy + \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{dy}{(x+y+1)^2} = -\frac{1}{8} \cdot \int_0^1 y|_0^{1-x} dx + \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x+y+1)^{-2} d(x+y+1) = \\ &= -\frac{1}{8} \cdot \int_0^1 (1-x) dx - \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 \frac{1}{x+y+1} \Big|_0^{1-x} dx = -\frac{1}{8} \cdot \left(x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \\ &= -\frac{1}{8} \cdot \left(\frac{1}{2} - 0 \right) - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x}{2} - \ln|x+1| \right) \Big|_0^1 = -\frac{1}{16} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - \ln 2 \right) = \frac{\ln 2}{2} - \frac{5}{16}. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{\ln 2}{2} - \frac{5}{16}$.