

Условие

Найти сумму ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n+1)x^{3n}}{n!}$.

Решение

Так как $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ при всех $z \in \mathbb{R}$, то подставляя $z = x^3$ получим:

$$e^{x^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^3)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Рассмотрим ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3nx^{3n}}{n!}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3nx^{3n}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3x^{3n}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3x^{3n+3}}{n!} = 3x^3 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{n!} = 3x^3 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^3)^n}{n!} = 3x^3 \cdot e^{x^3}.$$

Так как ряды $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3nx^{3n}}{n!}$ и $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{n!}$ сходятся при всех $x \in \mathbb{R}$, и их суммы соответственно равны

$3x^3 \cdot e^{x^3}$ и e^{x^3} , то при всех $x \in \mathbb{R}$ будет сходиться и ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3nx^{3n}}{n!} + \frac{x^{3n}}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n+1)x^{3n}}{n!}$, и сумма его

будет равна $3x^3 e^{x^3} + e^{x^3} = (1+3x^3) \cdot e^{x^3}$.

Ответ: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n+1)x^{3n}}{n!} = (1+3x^3) \cdot e^{x^3}, \quad x \in \mathbb{R}.$