Решение задачи скачано с сайта AMKbook.Net
AMKbook.Net – занятия, решебник и учебные материалы по высшей математике и математическому анализу.

Условие

Разложить функцию $y(x)=x^2\ln(4+x^2)$ в ряд Маклорена и найти радиус сходимости R полученного ряда.

Решение

$$y(x)=x^2\ln(4+x^2)=x^2\ln\left(4\cdot\left(1+\frac{x^2}{4}\right)\right)=x^2\ln 4+x^2\ln\left(1+\frac{x^2}{4}\right)$$

Так как $\ln(1+z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{z^n}{n}$ при $z\in(-1;1]$, то подставляя $z=\dfrac{x^2}{4}$, получим:

$$y(x)=x^2\ln 4+x^2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\left(\frac{x^2}{4}\right)^n}{n}=x^2\ln 4+x^2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{4^n\cdot n}=x^2\ln 4+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot x^{2n+2}}{4^n\cdot n}.$$

Полученное разложение верно при $-1<\dfrac{x^2}{4}\le 1$, $x^2\le 4$, $-2\le x\le 2$. Следовательно, радиус сходимости $R=2$.

Ответ: $y(x)=x^2\ln 4+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}\cdot x^{2n+2}}{4^n\cdot n}$, $-2\le x\le 2$.