

Условие

Найти радиус сходимости R и интервал сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{a} - 1)x^n$, исследовать ряд на сходимость и абсолютную сходимость на концах интервала сходимости.

Решение

Если $a=1$, то $\sqrt[n]{a}-1=0$, т.е. $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{a}-1)x^n=0$, ряд сходится при всех $x \in (-\infty; +\infty)$. Радиус сходимости в этом случае $R=\infty$.

Пусть $a \neq 1$. Обозначим $c_n = \sqrt[n]{a} - 1 = a^{\frac{1}{n}} - 1$, тогда $c_{n+1} = a^{\frac{1}{n+1}} - 1$.

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a^{\frac{1}{n}} - 1}{a^{\frac{1}{n+1}} - 1} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{a^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}}}{\frac{a^{\frac{1}{n+1}} - 1}{\frac{1}{n+1}}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{a^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}}}{\frac{a^{\frac{1}{n+1}} - 1}{\frac{1}{n+1}}} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \right| = \left| \frac{\ln a}{\ln a} \cdot 1 \right| = 1.$$

Интервал сходимости: $-1 < x < 1$.

При $x=1$ получим: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a^{\frac{1}{n}} - 1 \right) x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a^{\frac{1}{n}} - 1 \right)$.

Пусть $a > 1$. Так как $a^{\frac{1}{n}} - 1 > 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a^{\frac{1}{n}} - 1 \right)$ знакоположительный. Сравним данный ряд с гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, используя признак сравнения в предельной форме:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = \ln a.$$

Так как $0 < \ln a < +\infty$, то из расходимости гармонического ряда согласно признаку сравнения следует расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a^{\frac{1}{n}} - 1 \right)$.

Пусть $0 < a < 1$. В этом случае $a^{\frac{1}{n}} - 1 < 0$. Рассмотрим вспомогательный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - a^{\frac{1}{n}} \right)$. Так как $1 - a^{\frac{1}{n}} > 0$, то данный ряд знакоположительный. Сравним данный ряд с гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, используя признак сравнения в предельной форме:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - a^{\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(- \frac{a^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} \right) = -\ln a = \ln \frac{1}{a}.$$

Так как $0 < \ln \frac{1}{a} < +\infty$, то из расходимости гармонического ряда согласно признаку сравнения следует расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - a^{\frac{1}{n}} \right)$. Следовательно, будет расходиться и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-1 \cdot \left(1 - a^{\frac{1}{n}} \right) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a^{\frac{1}{n}} - 1 \right)$.

При $x = -1$ получим: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a^{\frac{1}{n}} - 1 \right) x^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(a^{\frac{1}{n}} - 1 \right)$.

Пусть $a > 1$. Так как $a^{\frac{1}{n}} - 1 > 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(a^{\frac{1}{n}} - 1 \right)$ знакочередующийся. Обозначим $u_n = a^{\frac{1}{n}} - 1$ и проверим выполнение условий признака Лейбница:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a^{\frac{1}{n}} - 1 \right) = 1 - 1 = 0.$$

Для проверки второго условия рассмотрим вспомогательную функцию $f(x) = a^{\frac{1}{x}} - 1$ при $x \geq 1$.

$$f'(x) = a^{\frac{1}{x}} \ln a \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right) = -\frac{a^{\frac{1}{x}} \ln a}{x^2}$$

Так как при $x \geq 1$ имеем $f'(x) < 0$, то функция $f(x)$ убывает при $x \geq 1$. Следовательно, при $n \geq 1$ получим: $f(n+1) > f(n)$, т.е. $u_{n+1} > u_n$. Оба условия признака Лейбница выполнены, но ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a^{\frac{1}{n}} - 1 \right)$ расходится, поэтому ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(a^{\frac{1}{n}} - 1 \right)$ сходится условно.

Пусть $0 < a < 1$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(a^{\frac{1}{n}} - 1 \right) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(1 - a^{\frac{1}{n}} \right)$$

Так как $1 - a^{\frac{1}{n}} > 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(1 - a^{\frac{1}{n}} \right)$ знакочередующийся. Обозначим $v_n = 1 - a^{\frac{1}{n}}$ и проверим выполнение условий признака Лейбница:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - a^{\frac{1}{n}} \right) = 1 - 1 = 0.$$

Для проверки второго условия рассмотрим вспомогательную функцию $f(x) = 1 - a^{\frac{1}{x}}$ при $x \geq 1$.

$$f'(x) = -a^{\frac{1}{x}} \ln a \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right) = \frac{a^{\frac{1}{x}} \ln a}{x^2}$$

Так как $0 < a < 1$, то $\ln a < 0$, поэтому при $x \geq 1$ имеем $f'(x) < 0$, т.е. функция $f(x)$ убывает при $x \geq 1$. Следовательно, при $n \geq 1$ получим: $f(n+1) > f(n)$, т.е. $v_{n+1} > v_n$. Оба условия признака Лейбница выполнены, но ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - a^{\frac{1}{n}} \right)$ расходится, поэтому ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(1 - a^{\frac{1}{n}} \right)$ сходится условно.

Ответ:

Если $a = 1$ ряд сходится при всех $x \in (-\infty; +\infty)$.

Если $a \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$, то:

- Радиус сходимости: $R = 1$
- Интервал сходимости: $-1 < x < 1$
- При $x = -1$ ряд сходится условно
- При $x = 1$ ряд расходится.