

Бесконечно малые функции

Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой функцией* при $x \rightarrow x_0$, если $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$.

1. Функции $\alpha_1(x)$ и $\alpha_2(x)$ называются *бесконечно малыми одного порядка* при $x \rightarrow x_0$, если

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = A, \quad A \neq 0, \quad A \in R.$$

Если $A = 1$, то функции $\alpha_1(x)$ и $\alpha_2(x)$ называются *эквивалентными бесконечно малыми*.

2. Функция $\alpha_1(x)$ называется *бесконечно малой высшего порядка*, чем $\alpha_2(x)$ при $x \rightarrow x_0$, если

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = 0$$

3. Функция $\alpha_1(x)$ называется *бесконечно малой низшего порядка*, чем $\alpha_2(x)$ при $x \rightarrow x_0$, если

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = \infty$$

4. Функция $\alpha_1(x)$ называется *бесконечно малой k -го порядка* относительно $\alpha_2(x)$ при $x \rightarrow x_0$, если

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2^k(x)} = A, \quad A \neq 0, \quad A \in R.$$

5. Бесконечно малые функции $\alpha_1(x)$ и $\alpha_2(x)$ называются *несравнимыми* при $x \rightarrow x_0$, если в точке x_0 не существует предела их отношения.

Приведенные выше определения остаются в силе при $x \rightarrow \infty$, $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$ и при $x \rightarrow x_0 \pm 0$.

Некоторые эквивалентные бесконечно малые функции

$\sin x \sim x, x \rightarrow 0.$	$e^x - 1 \sim x, x \rightarrow 0.$
$\operatorname{tg} x \sim x, x \rightarrow 0.$	$a^x - 1 \sim x \ln a, x \rightarrow 0.$
$\arcsin x \sim x, x \rightarrow 0.$	$\log_a(1+x) \sim x \log_a e, x \rightarrow 0.$
$\operatorname{arctg} x \sim x, x \rightarrow 0.$	$\ln(1+x) \sim x, x \rightarrow 0.$
$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}, x \rightarrow 0.$	$(1+x)^k - 1 \sim kx, x \rightarrow 0, k > 0.$