

Задание 1.

Найти $y(t)$, если $y(t) = \sin 2t - \frac{8}{3} \int_0^t sh 3(t - \tau) y(\tau) d\tau$

Решение.

Разложим гиперболическую функцию $sh(3(t - \tau))$ в ряд:

$$sh(3(t - \tau)) = 3(t - \tau) + \frac{(3(t - \tau))^3}{3!} + \frac{(3(t - \tau))^5}{5!} + \dots$$

Тогда интеграл перепишется в следующем виде:

$$\int_0^t sh 3(t - \tau) y(\tau) d\tau = \int_0^t \left[3(t - \tau) + \frac{(3(t - \tau))^3}{3!} + \frac{(3(t - \tau))^5}{5!} + \dots \right] y(\tau) d\tau$$

Вычислим этот интеграл для первого члена ряда:

$$\begin{aligned} \int_0^t (3(t - \tau)) y(\tau) d\tau &= \int_0^t 3t \cdot y(\tau) d\tau - \int_0^t 3\tau \cdot y(\tau) d\tau \\ &= 3t \cdot y(\tau) \Big|_0^t - 3t \cdot y(\tau) \Big|_0^t + 3 \int_0^t \int_0^t y(\tau) d\tau d\tau = 3 \int_0^t \int_0^t y(\tau) d\tau d\tau \end{aligned}$$

Проинтегрируем интеграл по частям:

$$u = \tau; du = d\tau$$

$$dv = y(\tau); v = \int y(\tau) d\tau$$

Тогда:

$$y(t) = \sin 2t - \frac{8}{3} \left[3 \int_0^t \int_0^t y(\tau) d\tau d\tau + \dots \right]$$

Ответ: $y(t) = \sin 2t - \frac{8}{3} \left[3 \int_0^t \int_0^t y(\tau) d\tau d\tau + \dots \right]$