

Задание 1.

Найти $y(t)$, если $y(t) = \sin 2t - \frac{8}{3} \int_0^t \operatorname{sh} 3(t-\tau) y(\tau) d\tau$

Решение.

Выпишем заданный интеграл и решим его отдельно применим интегрирование по частям:

$$\int_0^t \operatorname{sh} 3(t-\tau) y(\tau) d\tau$$

$$u = y(\tau); du = y(\tau)' d\tau$$

$$dv = \operatorname{sh} 3(t-\tau); v = \int \operatorname{sh}(3(t-\tau)) d\tau = -\frac{1}{3} \operatorname{ch}(3(t-\tau))$$

Тогда:

$$\begin{aligned} \int_0^t \operatorname{sh} 3(t-\tau) y(\tau) d\tau &= y(\tau) d\tau \cdot -\frac{1}{3} \operatorname{ch}(3(t-\tau)) \Big|_0^t - \int_0^t -\frac{1}{3} \operatorname{ch}(3(t-\tau)) y(\tau)' d\tau = \\ &= -\frac{1}{3} y(\tau) d\tau \cdot \operatorname{ch}(3(t-\tau)) \Big|_0^t + \frac{1}{3} \int_0^t \operatorname{ch}(3(t-\tau)) y(\tau)' d\tau \end{aligned}$$

Проинтегрируем интеграл по частям:

$$\int_0^t \operatorname{ch}(3(t-\tau)) y(\tau)' d\tau$$

$$u = \operatorname{ch}(3(t-\tau)); du = -3 \cdot \operatorname{sh}(3(t-\tau)) d\tau$$

$$dv = y(\tau)' d\tau; v = \int y(\tau)' d\tau = y(\tau)$$

$$\int_0^t \operatorname{ch}(3(t-\tau)) y(\tau)' d\tau = y(\tau) \cdot \operatorname{ch}(3(t-\tau)) \Big|_0^t + 3 \int_0^t \operatorname{sh}(3(t-\tau)) y(\tau) d\tau$$

Тогда:

Теперь будет поэтапно подставлять полученные выражения:

$$\begin{aligned}\int_0^t sh(3(t-\tau))y(\tau) d\tau &= -\frac{1}{3}y(\tau) \cdot ch(3(t-\tau)) \Big|_0^t + \frac{1}{3} \int_0^t ch(3(t-\tau))y(\tau)' d\tau \\&= -\frac{1}{3}y(\tau) \cdot ch(3(t-\tau)) \Big|_0^t \\&\quad + \frac{1}{3} \left(y(\tau) \cdot ch(3(t-\tau)) \Big|_0^t + 3 \int_0^t sh(3(t-\tau))y(\tau) d\tau \right) \\&= \int_0^t sh(3(t-\tau))y(\tau) d\tau\end{aligned}$$

В итоге мы получили исходный интеграл, значит он равен нулю, тогда:

$$y(t) = \sin 2t - \frac{8}{3} \cdot 0 = y(t) = \sin 2t$$

Ответ: $\sin 2t$